Данная серия методичек посвящается лучшему преподавателю по электроду
На этом семинаре не было историй про теорфизиков
Мы обсуждали художников где-то 70% семинара

Семинарист (начинает семинар): А кто из вас был в Париже? В Эрмитаже? В Париже лучший музей мира – Лувр. Вообще там много других музеев есть. А ещё там есть музей импрессионистов. Каких вы знаете импрессионистов?

Семинарист: У Гогена была интересная жизнь: у него было состояние, жена, дети. Он всё бросил, стал художником. Дружил с Ван Гогом. Возможно, он довёл его до сумасшествия, так что надо как-то аккуратнее подбирать круг общения. Это всё было в письмах Ван Гога; не то что я советую вам их читать, но просто тема интересная.

Семинарист: Я вам рассказывал, что когда я был студентом, у меня был ММФ первой парой в субботу? С тех пор я ММФ не знаю.

Доселе мы решали задачи электростатики простыми общефизными методами – например, методом изображений (это скорее даже не метод, а хитрый трюк, срабатывающий в задачах, где есть симметрия). Теперь перейдём к задачам, где подобное не срабатывает, и требуется решениями методами ММФ.

Маленький эпиграф:
Автор: Андрей Владимирович, а правда 8-й том Л-Л для электрода бесполезен?
Толоконников: Скорее да. В Л-Л нормальный электрод, со статфизом, описывающий электродинамику реальных сплошных сред. А вам предлагают достаточно урезанный, с целью скорее показать, как работает ММФ в задачах электростатики.

Так что давайте посмотрим, как же он работает ☺

ЗАДАЧА 21.1

21.1. Незаряженный проводящий шар радиуса R вносится в электрическое поле, которое в отсутствии шара было однородным и равным $\vec{E}_0$. Определить результирующее поле $\vec{E}$ и плотность поверхностных зарядов на шаре.

Перейдём в сферическую СК с центром в центре шара, а ось z направим вдоль $\vec{E}_0$. Тогда при r>R у нас нет зарядов (есть только поверхностные, но они при r=R), и справедливо уравнение Лапласа Δφ=0. Осталось решить его в сферической СК.

На ММФ мы кучу раз решали уравнение Лапласа Δu=0 в различных СК, в том числе в сферической. Давайте вспомним решение!

Это будет

$$u=\sum_{l=0}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{l}\left(A^{c}_{lm}r^{l}+B^{c}_{lm}r^{-l}\right)Y^{c}_{lm}(\theta,\varphi)+\right.$$
$$\left.\sum_{m=1}^{l}+\left(A^{s}_{lm}r^{l}+B^{s}_{lm}r^{-l}\right)Y^{s}_{lm}(\theta,\varphi)\right)$$

Однако в большинстве случаев на электроде зависимости от φ (угла, не путать с потенциалом) нет, и решение зависит лишь от r и θ, что позволяет записать его в гораздо более простом виде:

$$\varphi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l+\frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)$$

Где P_l – l-тый полином Лежандра.

Мы записали общее решение! Но в нём остались константы – Ашки и Вшки. Их нужно подобрать константы так, чтобы выполнялись ГУ. Давайте их выпишем!

Одно из на границе

$$\varphi\big|_{r=R}=C_2=const$$

Потому что там всё-таки проводник, и потенциал во всех его точках одинаков.

А второе ГУ на бесконечности:

$$\varphi\big|_{r\to\infty}=-(\vec{E}_0\vec{r})+C_1$$

Возможно, вам неочевидно, откуда взялось скалярное произведение. На самом деле учитывая, что $\vec{E}_0$ направлена вдоль оси аппликат, это на самом деле –E0*z+C1. Т.е. на больших расстояниях потенциал будет такой же, какой был бы в отсутствие шара: -E0*z+C1 (или -E0*r*cos θ+C1).

Константы при потенциале будут вылезать всегда, т.к. у нас нет привязки, где брать 0 потенциала. Можно, если вы хотите, взять 0 в центре шара, тогда С2 будет 0. Можно не заморачиваться (как Чугреев).

Итак, погнали пристраивать наши ГУ к решению ур-я Лапласа.

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right) P_l(\cos\theta)$$

Сперва нужно избавиться от знака суммы. Чугреев с Шишаниным не заморачиваются и пишут «ищем решение в виде

$$A_0 + \frac{B_0}{r} + \cos\theta\left(A_1 r + \frac{B_1}{r^2}\right)$$ ».

Я хочу показать всё же некий алгоритм, почему именно в таком виде. Есть метод засвеченных индексов (название моё): ***нужно оставить только те l, которые есть («засветились») хотя бы в одном ГУ.***

Для первого ГУ, при r=R хорошо подойдёт нулевой полином Лежандра: он не зависит от θ, что нам и нужно. ***Т.е. это ГУ «засветило» l=0.***
Для второго ГУ, при r->бесконечности подойдёт первый полином Лежандра – $P_1(\cos\theta)$, который равен просто cos θ. ***Т.е. это ГУ «засветило» l=1.***

А *l* больше 1 нам и не нужны, соответствующие им Ашки и Вшки надо занулить. Т.е. засветились только l=0 и l=1, следовательно, ищем решение в виде $A_0 + \frac{B_0}{r} + \cos\theta\left(A_1 r + \frac{B_1}{r^2}\right)$.

Подставляем в него оба ГУ:
Чтобы при r=R потенциал φ оказался $=C_2$, необходимо одновременное выполнение $A_0 + \frac{B_0}{R} = C_2$ и $A_1 R + \frac{B_1}{R^2} = 0$.

На этом моменте я предлагаю читателю (особенно если у него проблемы с ММФ) остановиться и понять, почему должно выполняться эти два равенства. У нас решение вида $\varphi = A_0 + \frac{B_0}{r} + \cos\theta\left(A_1 r + \frac{B_1}{r^2}\right)$.
Чтобы оно при r=R было равно $=C_2$, сперва требуется то, чтобы оно не зависило от cos θ (откуда равен 0 множитель перед cos θ, т.е

$A_1 R + \frac{B_1}{R^2} = 0$), а затем уже приравниваем к C_2 часть, не зависящую от θ:

$A_0 + \frac{B_0}{R} = C_2$).

Очень важно, чтобы читатель понял это рассуждение, тогда у него не будет проблем на КР1.

Итак, из первого ГУ мы получили $A_0 + \frac{B_0}{R} = C_2$ и $A_1 R + \frac{B_1}{R^2} = 0$.
Переходим ко второму ГУ:

Чтобы на бесконечности φ имело вид $-E_0 \cdot r \cdot \cos\theta + C_1$, необходимо

$A_1 = -E_0,\ A_0 = C_1$.

Четыре уравнения, четыре неизвестных (A_0, A_1, B_0, B_1). A_0 и A_1 уже выражены, B1 будет $E_0 R^3$, а B_0 R(C2-C1). Получаем в итоге

$$\varphi(r, \theta) = C_1 + \frac{R(C_2 - C_1)}{r} + \cos\theta\left(-E_0 r + \frac{E_0 R^3}{r^2}\right)$$

У Чугреева так же, только вместо $R(C_2-C_1)$ он оставил B0. Давайте сделаем также:

$$\varphi(r, \theta) = C_1 + \frac{R B_0}{r} + \cos\theta\left(-E_0 r + \frac{E_0 R^3}{r^2}\right)$$

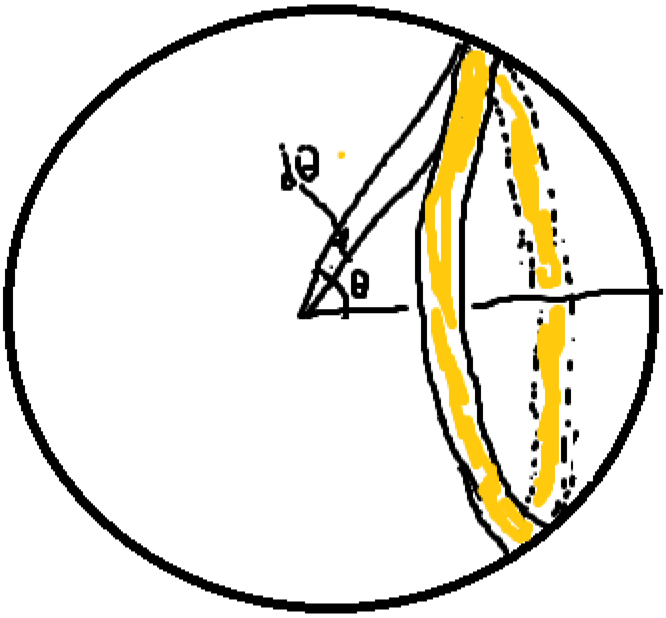
Мы нашли потенциал φ(r, θ) в любой точке пространства вне шара (внутри него он, очевидно, одинаков и равен φ(R). Торжество методов ММФ налицо!

От нас в условии также требуют поверхностная плотность заряда, давайте найдём и её. Она прямо пропорциональна (с коэфом 4π) напряжённости, которую находим как минус производную φ по нормали:

$$\sigma_S = -\frac{1}{4\pi}\left.\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right|_{r=R} = +\frac{1}{4\pi}\frac{B_0}{R^2} - \frac{1}{4\pi}\left\{-E_0\cos\theta - 2E_0\frac{R^3\cos\theta}{R^3}\right\} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{B_0}{R^2} + \frac{3E_0\cos\theta}{4\pi}$$

А полный заряд надо искать как интеграл. Тут надо быть аккуратнее: интегрировать мы будем по θ, и σ у нас функция θ. Элемент площади, соответствующий углу θ, будет вот такое вот колечко



площадью $4\pi R^2$ (площадь шара) * dz/2R (доли dz от диаметра), т.е. $4\pi R^2$ (площадь шара) * $dR\sin\theta/2R = 2\pi R^2 \sin\theta\, d\theta$. Здесь я воспользовался теоремой о независимости площади такого колечка от места, где он вырезан и пропорциональностью его площади его проекции на диаметр (dz). Вы можете считать площадь колечка по-другому, получите тот же результат.
Тогда

$$q_{полн} = \int_0^{\pi} \left(\frac{B_0}{4\pi R^2} + \frac{3E_0 \cos\theta}{4\pi} \right) 2\pi R^2 \sin\theta\, d\theta$$

Синус ортогонален косинусу от 0 до π, поэтому останется

$$q_{полн} = \int_0^{\pi} \frac{B_0}{4\pi R^2} \cdot 2\pi R^2 \sin\theta\, d\theta = B_0 \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta/2 = B_0$$

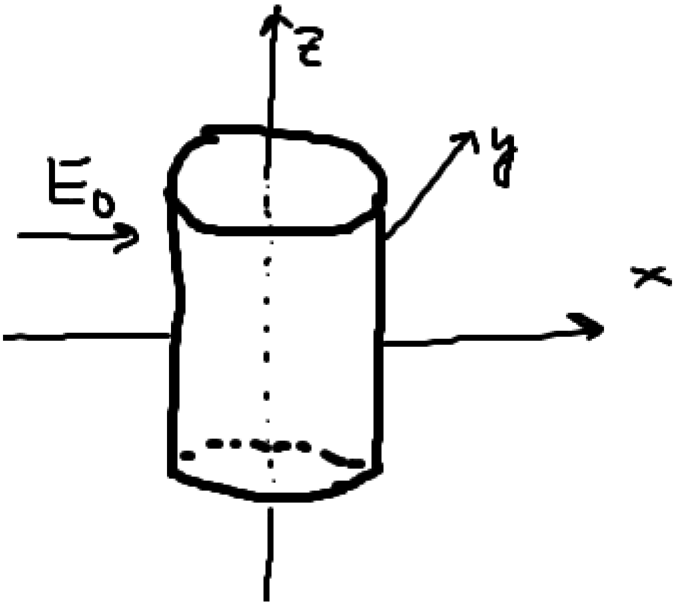
Ах вот зачем Чугреев оставил B0 в ответе! Оказывается, если шар незаряжен, как в нашей задаче, слагаемое с B0

$$\varphi(r,\theta) = C_1 + \frac{B_0}{r} + \cos\theta \left(-E_0 r + \frac{E_0 R^3}{r^2} \right)$$

Нужно выкинуть. Глядя на его вид (обратную пропорциональность от r), мы ловим себя на мысли, что могли сразу догадаться, что B0 – это суммарный заряд шара ☺ Ну, тоже неплохо, решили более общую задачу с заряженным шаром.

ЗАДАЧА 21.2

21.2. Незаряженный проводящий цилиндр радиуса R помещен во внешнее однородное электрическое поле $\vec{E}_0$, перпендикулярное оси цилиндра. Найти потенциал результирующего поля.



Да всё точно так же, опять ММФ. На этот раз лучше выбрать цилиндрические координаты (ρ, φ, z). Ну, у нас в задаче цилиндр же!

Некая накладка обозначений – φ обозначает и угол, и потенциал. Давайте угол обозначать буквой α.

Вновь решаем уравнение Лапласа Δφ=0, на этот раз при ρ>R (т.е. снаружи цилиндра, где зарядов нет, поэтому Δφ и будет =0). Заметим, что Δφ можно представить как $\Delta_{\rho\alpha}\varphi + \varphi_{zz}$. Очевидно, что задача вдоль оси z однородна, поэтому φ_{zz} будет равно 0, и от цилиндрических координат мы перейдём к полярным. (По-моему, все задачи на цилиндрическую СК в электроде скатываются в полярную, т.е. в 2D).

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \\ \rho = R: \quad \varphi = const = C_2 \\ \rho \to \infty: \quad \varphi = -E_0 \underbrace{\rho\cos\theta}_{x} + C_1 \end{cases}$$

Итак, давайте вспомним решение уравнения Лапласа – на этот раз в полярной СК. Верно: это ρ^n и ρ^{-n}, домноженные на cos nα и sin nα + const + ln ρ, где n – натуральное:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_n\rho^n + \frac{C_n}{\rho^n}\right)\sin n\alpha + \left(B_n\rho^n + \frac{D_n}{\rho^n}\right)\cos n\alpha\right] + B_0 + D_0\ln\rho$$

Иногда пишут суммирование от 0, а не от 1, тогда константа B_0 как бы вносится под знак суммы. Но по мне, гораздо лучше её вынести.

А далее начинается подгон под ГУ:
На одном ГУ нет зависимости от θ, а на другом есть в виде cos α. Это значит (применяем метод засвеченных индексов), что выживут только «засвеченные» слагаемые: не зависящие от θ и с множителем cos α:

$$\varphi(\rho,\alpha) = \left(B_1\rho + \frac{D_1}{\rho}\right)\cos\alpha + B_0 + D_0\ln\rho$$

Теперь подставляем в ГУ и находим константы:

$$\rho = R: \left(B_1 R + \frac{D_1}{R}\right)\cos\alpha + B_0 + D_0\ln R = C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_1 R + \frac{D_1}{R} = 0; \quad B_0 + D_0\ln R = C_2$$

$$\rho \to \infty: (B_1\rho)\cos\alpha + B_0 + D_0\ln\rho = -E_0\rho\cos\alpha + C_1$$

$$\Rightarrow B_1 = -E_0; \quad B_0 = C_1, \; D_0 = 0$$

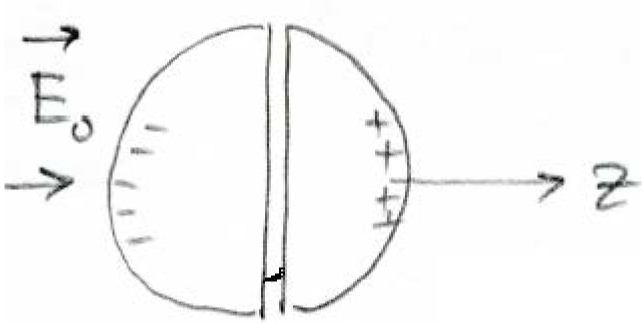
У нас вышло 5 уравнений, впрочем, уравнение B_0+D_0lnR устанавливает C2 (которая имеет уже не произвольный вид) и оно на самом деле нам не нужно.
D_1 получаем равным $-B1*R^2=E0*R^2$.
В итоге

$$\varphi(\rho,\alpha) = \left(-E_0\rho + \frac{E_0 R^2}{\rho}\right)\cos\alpha + C_1$$

ЗАДАЧИ 21.3, 21.3а

21.3. Проводящий шар радиуса R разрезан на два полушария, соединенные между собой, и помещен во внешнее однородное поле $\vec{E}_0$, направленное перпендикулярно плоскости разреза. Найти силу, действующую на каждое из полушарий.

Фраза «соединённые между собой» означает, что кольца соединены небольшим проводящим проводочком:



Благодаря этому проводочку полушария смогут обмениваться зарядом, и правое приобретёт +, а левое -. Очевидно, что они будут притягиваться, но с какой силой?

Решение «в лоб» было бы «ну раз мы знаем распределение зарядов

$$\sigma(\theta) = \frac{3E_0\cos\theta}{4\pi}$$

, то можем найти силу притяжения простым интегрированием». Интеграл будет четверным: по $\theta_{\text{левого полушария}}$, $\varphi_{\text{левого полушария}}$, $\theta_{\text{правого полушария}}$, $\varphi_{\text{правого полушария}}$ и очень сложным. Давайте искать обходные манёвры.

Оказывается, сила, действующая на любой проводник в вакууме, может быть найдена через поверхностный интеграл:

$$\vec{F} = \frac{1}{8\pi}\iint\limits_S E^2\vec{n}\,dS$$

Где S – поверхность проводника. Именно в такой форме его записывают Соколов и Чугреев (доказательство формулы они приводят на лекциях). В качества проводника возьмём любое из полушарий. Правое, например.

Вблизи проводника

$$\vec{E} = 4\pi\sigma\vec{n}$$

Что позволяет переписать силу как

$$\vec{F} = 2\pi \iint_S \sigma^2 \vec{n}\, dS$$

А вот это будет посчитать легко: на гладкой ровной поверхности полушария поверхностные заряды отсутствуют вовсе, а на округлой мы их подсчитали в 21.1 (результатом которой мы сейчас и воспользуемся). Что же, подсчитаем интеграл для квадрата поверхностной плотности заряда!
Также заметим, что сила, очевидно, направлена вдоль оси симметрии (поля), поэтому сразу спроектируем всё на неё. Вектор нормали **n** превратится в множитель cos θ.
Сила (по модулю) будет

$$F = 2\pi \int_0^{\pi/2} \overbrace{\left(\cancelto{=0}{\frac{B_0}{4\pi R^2}} + \frac{3E_0\cos\theta}{4\pi} \right)^2}^{\sigma^2} \overbrace{2\pi R^2 \sin\theta\, d\theta}^{dS} \cdot \overbrace{\cos\theta}^{\text{проекция}}$$

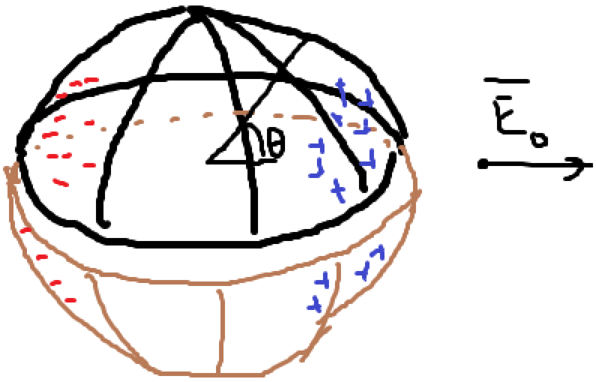
Вычисляем:

$$F = \frac{9E_0^2R^2}{4} \int_0^{\pi/2} \cos^3\theta \sin\theta\, d\theta$$

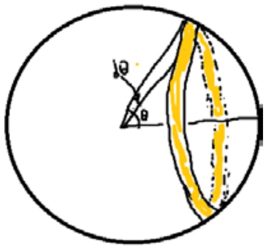
Интеграл равен ¼, поэтому получаем в итоге ответ.

$$F = \frac{9E_0^2R^2}{16}$$

В задаче 21.3а



Пластины будут уже отталкиваться. Рассмотрим верхнее полушарие и вновь применим нашу теорему. Интегрирование по θ на этот раз будет от 0 до π, но



зато элемент площади уменьшится в два раза: от рыжего

кольца до его половины , т.к. мы рассматриваем только верхнее полушарие.

Также у нас меняется ось, вдоль которой будет направлена сила, поэтому множитель проекции меняется с cos θ на sin θ.

$$F = 2\pi \int_0^{\pi} \overbrace{\left(\cancel{\frac{B_0}{4\pi R^2}}_{=0} + \frac{3E_0 \cos\theta}{4\pi} \right)^2}^{\sigma^2} \overbrace{\pi R^2 \sin\theta \, d\theta}^{dS} \cdot \overbrace{\sin\theta}^{\text{проекция}} =$$

$$= \frac{9E_0^2}{8} \int_0^{\pi} \sin^2\theta \cos^2\theta \, d\theta = \frac{9E_0^2}{32} \int_0^{\pi} \sin^2 2\theta \, d\theta =$$

$$\frac{9E_0^2}{64} \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin^2 t \, dt}_{=\pi} = \frac{9\pi E_0^2}{64}$$

Тут у меня не сходится коэф-т с Чугреевым: у него 9/32, у меня 9π/64. А остальные эту задачу не решали ☹

Резюме:

1) Задачи электростатики 21-го и 22-го семинаров, которые 100% будут на КР1 (возможно, даже обе задачи из двух, такие варианты есть) решаются методами ММФ по алгоритму:

а) Записываем уравнение Лапласа $\Delta\varphi=0$, решаем, в какой СК будем решать

б) Записываем общее решение в этой СК через сумму по всем индексам

в) Записываем ГУ. Методом засвеченных индексов избавляемся от знака суммы

г) Находим константы из ГУ, записывая и решая систему уравнений.

д) PROFIT – получаем потенциал в любой точке вне проводника.

2) Находить силу, действующую на проводник, можно по формуле

$$\vec{F} = \frac{1}{8\pi} \iint_S E^2 \vec{n}\, dS.$$

Причём если мы знаем потенциал, то можем найти **E** как $-\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ вблизи поверхности проводника.